УДК 539.12.01

МЕДЛЕННОЕ ВРАЩЕНИЕ МАССИВНЫХ ТЕЛ В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ИОРДАНА-БРАНСА-ДИККЕ

В.И. Рейзлин

Институт «Кибернетический центр» ТПУ
E-mail: valera@ad.cctpu.edu.ru

Рассматривается задача о медленном вращении релятивистских тел в скалярно-тензорной теории тяготения. В первом приближении по угловой скорости получено уравнение, описывающее вращение, его внешнее решение и выражение для момента импульса. Приведены результаты численного интегрирования этих уравнений. В расчетах применялось уравнение состояния нейтронно-звездной материи в модели однобозонного обмена. Полученные результаты сравниваются с данными наблюдений пульсаров.

Проблеме вращающихся тел в рамках общей теории относительности (ОТО) посвящен ряд работ [1–5]. В [1] было найдено точное решение уравнений Эйнштейна для стационарного аксиально-симметричного гравитационного поля в вакууме. В [2–5] рассматривалось приближенное общее решение, описывающее поле медленно вращающегося тела.

Представляет интерес рассмотрение данного вопроса с точки зрения альтернативных теорий гравитации. Одной из них является скалярно-тензорная теория Иордана-Бранса-Дикке [6–8]. Задача вращения тел в этой теории рассмотрена в работе [9]. Настоящая статья посвящена данному вопросу и ограничивается моделью медленного вращения, при котором угловая скорость ω удовлетворяет условиям:

$$\omega r << 1, \quad \omega^2 << M / r^3. \qquad (1)$$

Первое из них означает, что линейная скорость любого элемента тела много меньше скорости света c, а второе – малость центробежных сил по сравнению с силами тяготения. В (1) M – масса тела, r – радиальная координата; здесь и далее используются единицы $c=G=1$, G – гравитационная постоянная.

Уравнения поля в скалярно-тензорной теории тяготения имеют следующий вид [6–8]:

$$G_{\mu\nu} = -8\pi\psi^{-1}T_{\mu\nu} - \sigma\psi^{-2}(\psi_{;\mu}\psi_{;\nu} - 1/2 \cdot g_{\mu\nu}\psi_{;\rho}\psi^{;\rho}) - -\psi^{-1}(\psi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\psi^{;\rho}{}_{;\rho}), \qquad (2)$$

$$\psi^{;\rho}{}_{;\rho} = 8\pi(3+2\sigma)^{-1}T^{\mu}_{\mu}, \qquad (3)$$

где ψ – дальнодействующее скалярное поле; σ – безразмерная константа связи ψ-поля; $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор; $G_{\mu\nu}$ – тензор Эйнштейна; $T_{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса материи, выражающийся через давление P и плотность вещества ρ следующим образом:

$$T_{\mu\nu} = (P+\rho)u_\mu u_\nu - Pg_{\mu\nu}. \qquad (4)$$

Здесь $u_\mu = ds/dx^\mu$ – четырёхскорость, ds – интервал, $u_\mu u^\mu = 1$.

Теория Иордана-Бранса-Дикке переходит в ОТО в предельном случае $\sigma\to\infty$, $\psi=1$. Радиоастрономические измерения устанавливают ограничение $\sigma>15$ [10].

В первом порядке разложения метрических коэффициентов по степеням ω квадрат интервала можно записать в виде [3, 9]:

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - -r^2[d\theta^2 + \sin^2\theta(d\varphi - \Omega(r,\theta)dt)^2], \qquad (5)$$

где $B(r)$, $A(r)$ – метрические коэффициенты, θ – долгота, φ – широта; функция Ω описывает «увлечение» инерциальной системы отсчета телом и возникает вследствие вращения конфигурации. В работе [9] показано, что в рассматриваемом приближении функция Ω не зависит от долготы θ. Уравнения (2-4) являются тогда уравнениями гидростатического равновесия [11], которые определяют в требуемом приближении функции A, B, ρ, P, ψ и другие четные по ω параметры системы. После нахождения этих параметров для определения линейной по ω функции Ω достаточно решить единственное неисчезающее недиагональное ($t\varphi$)-уравнение в системе (2), записанное в первом порядке по ω [9]:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{\psi r^4}{\sqrt{AB}} \cdot \frac{d\Omega}{dr}\right) = 16\pi(P+\rho)(\Omega-\omega)\sqrt{\frac{A}{B}}r^4. \qquad (6)$$

Это уравнение описывает медленное вращение системы в скалярно-тензорной теории гравитации. В пределе ОТО ψ=1, поэтому (6) переходит в известное уравнение теории Эйнштейна [3].

Граничными условиями для (6) являются $\Omega(0)$=const, $\Omega(\infty)\sim r^{-3}$.

Воспользовавшись решением Гекмана [6] для функций A, B, ψ в пустоте, найдем внешнее решение уравнения (6):

$$\Omega = \frac{3J}{16h^2(KM)^3}\times$$

$$\times\left[\tau^p\left(\frac{2}{p}-\frac{\tau^{-2h}}{p-2h}-\frac{\tau^{2h}}{p+2h}\right)+\frac{8h^2}{p(p^2-4h^2)}\right], \quad (7)$$

$$r = 4hKM(\tau^{1/2-h}-\tau^{1/2+h})^{-1},$$

$$h^2=\frac{1}{4}-\frac{C(1-\sigma C)}{2K^2},\ K=1+2C,\ p=1+1/K. \quad (8)$$

Здесь C – константа интегрирования, определяемая при решении уравнений гидростатического равновесия с учетом непрерывности внутреннего и внешнего решения на границе конфигурации $P(R)$=0, где R – радиус тела [9]; τ – параметр, причем $0<\tau<1$. Значение τ на поверхности тела определяется одновременно с константой C [10].

В формуле (7) J – момент импульса, который, как можно показать [9], в скалярно-тензорной теории приобретает следующий вид:

$$J=\left[-\frac{1}{6}\frac{\psi r^4}{\sqrt{AB}}\cdot\frac{d\Omega}{dr}\right]_{r=R}=$$

$$=\frac{8\pi}{3}\int_0^R r^4(P+\rho)(\omega-\Omega)\frac{\sqrt{A}}{\psi\sqrt{B}}dr+$$

$$+\frac{1}{6}\int_0^\infty\frac{r^4}{\psi\sqrt{AB}}\cdot\frac{d\psi}{dr}\cdot\frac{d\Omega}{dr}dr. \quad (9)$$

Последний член в (9) можно интерпретировать как вклад ψ-поля в момент импульса системы. Момент инерции конфигурации относительно оси вращения $I=J/\omega$ также можно выразить через сумму двух членов $I=I_\rho+I_\psi$, которая отражает вклады вещественной и полевой компоненты в момент инерции системы.

Приведем результаты численного интегрирования уравнений гидростатического равновесия и уравнения (6), описывающего вращение.

При расчетах в области подъядерных плотностей использовалось уравнение состояния из [13]. При плотностях выше ядерной применялись уравнения состояния, полученные в модели однобозонного обмена. Ядерная материя рассматривалась в приближении Хартри-Фока, и в модели учитывался обмен псевдоскалярными мезонами π, η, векторными мезонами ω, ρ, φ и гипотетическими скалярными мезонами σ (изоскаляр) и δ (изовектор) [14, 15]. На рис. 1 представлено уравнение состояния нейтронно-звездной материи. Сплошная кривая отвечает модели однобозонного обмена при массах гипотетических мезонов 540 МэВ, штрихпунктирная кривая приведена для сравнения и взята из работы [16].

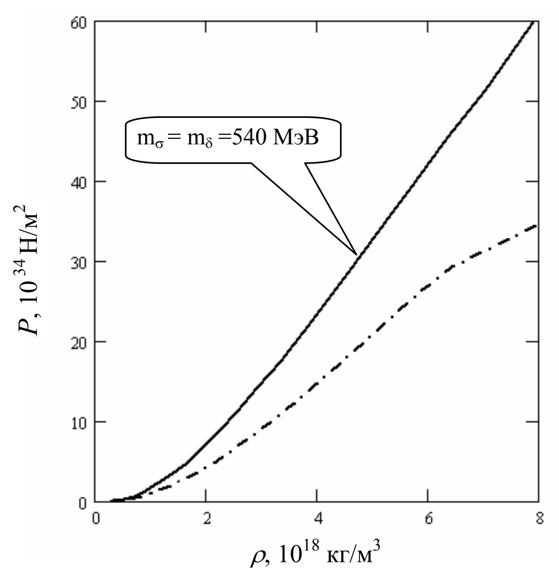


Рис. 1. *Зависимость давления ядерной материи от плотности массы: сплошная кривая – модель однобозонного обмена [14], штрихпунктирная – из работы [16]*

На рис. 2 изображена зависимость относительных вкладов ψ-поля в нормированные момент инерции и массу от логарифма плотности ρ_0 в центре конфигурации. Сплошные кривые соответствуют распределению M_ψ/M, штрихпунктирные – I_ψ/I. Числа у кривых указывают значения параметра связи ψ-поля σ.

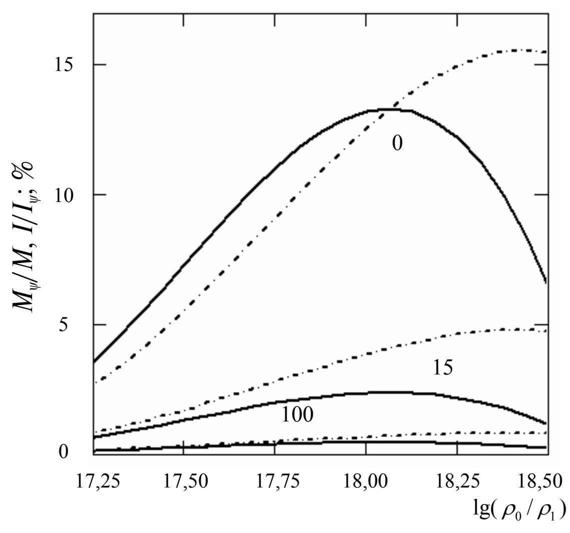


Рис. 2. *Относительные вклады скалярного поля в нормированные момент инерции и массу, ρ_1=1 кг/м³*

Для пульсара PSR 0532 измерено гравитационное красное смещение линии аннигиляции e^+e^- у его поверхности; параметр смещения $Z=B^{-1/2}-1=\Delta\lambda/\lambda=0{,}28$ [17], где λ – длина волны излучения. Кроме того, анализ энергетического баланса в Крабовидной туманности позволяет устано-

вить ограничения на момент инерции пульсара PSR 0532. При различных предположениях получаются оценки [18]: a) I>1,0·10^{36} кг·м^2; b) I>1,8·10^{36} кг·м^2.

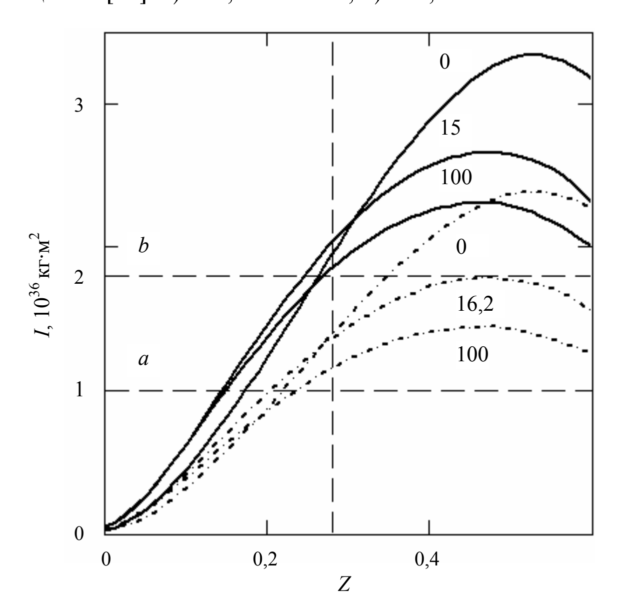


Рис. 3. *Зависимость момент инерции – параметр красного смещения на поверхности пульсара*

На рис. 3 изображены кривые, представляющие зависимость параметра смещения Z от момента инерции для рассчитанных конфигураций. Сплошные кривые соответствуют расчетам по уравнению состояния в модели однобозонного обмена [14], штрихпунктирные линии получены из уравнения состояния [16]. Прямые a), b) отвечают оценкам a) и b) соответственно. Вертикальная линия отмечает значение Z=0,28.

Уравнение состояния в модели однобозонного обмена является более «жестким» по сравнению с [16] (рис. 1). Поэтому рассчитанные по [14] конфигурации удовлетворяют обеим оценкам a), b) при любых значениях σ (рис. 3).

Как видно из рис. 3, уравнения состояния из [16] приводят к конфигурациям, удовлетворяющим оценке a) при любых значениях σ. Оценке b) удается удовлетворить лишь при σ<16,2.

Поскольку экспериментально полученное значение Z фиксирует величину момента инерции, оказывается, что ни один из рассмотренных вариантов, соответствующих уравнению состояния [16], не удовлетворяет одновременно оценке b) момента инерции и оценке параметра красного смещения. В то же время модель однобозонного обмена по-прежнему удовлетворяет обеим оценкам Z=0,28 и b) при любых σ. Видимо, уравнение состояния [16] следует считать недостаточно жестким для объяснения астрофизических данных.

Знание параметра красного смещения и момента инерции пульсара позволяет наложить ограничения на допустимые уравнения состояния. С другой стороны, эти параметры при достаточно надежном уравнении состояния могут быть использованы для проверки теории тяготения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kerr R.P. Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics // Phys. Rev. Lett. – 1963. – V. 11. – № 5. – P. 237–238.
2. Дорошкевич А.Г., Зельдович Я.Б., Новиков И.Д. Гравитационный коллапс несимметричных и вращающихся масс // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1965. – Т. 49. – № 4. – С. 170–181.
3. Hartle J.B. Slowly Rotating Relativistic Stars. I // Astrophysical Journal. – 1967. – V. 150. – P. 1005–1029.
4. Седракян Д.М., Чубарян Э.В. Стационарные аксиально-симметрические гравитационные поля // Астрофизика. – 1968. – № 4. – С. 239–255.
5. Cohen J.M., Brill D.R. Slowly rotating neutron stars // Nuovo Cim. – 1968. – V. 56B. – P. 209–215.
6. Jordan P. Schwerkraft und Weltall. – Braunschweig: Verlagsgesellshaft, 1955. – 214 S.
7. Brans C., Dicke R.H. Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation // Phys. Rev. – 1961. – V. 124. – № 3. – P. 925–935.
8. Brans C. Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. II // Phys. Rev. – 1962. – V. 125. – № 6. – P. 2194–2201.
9. Рейзлин В.И. Медленно вращающиеся тела в скалярно-тензорной теории тяготения // Известия вузов. Физика. – 1981. – Т. 24. – № 5. – С. 22–26.
10. Рейзлин В.И. Модель медленного вращения в скалярно-тензорной теории тяготения // В сб.: Математическое и программное обеспечение САПР. – Вып. 1. – Томск: Изд-во Том. политехн. ун-та, 1997. – С. 178–186.
11. Fomalont E.B., Sramek R.A. Measurements of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves in Agreement With General Relativity // Phys. Rev. Lett. – 1976. – V. 36. – P. 1475–1478.
12. Саакян Г.С. Равновесные конфигурации вырожденных газовых масс. – М.: Наука, 1972. – 220 с.
13. Ferrini F. The Equation of State for Neutron Stars // Astrophysical Space Sci. – 1975. – V. 32. – № 1. – P. 231–247.
14. Филимонов В.А. Ядерное и гиперядерное вещество в модели однобозонного обмена // Ядерная физика. – 1985. – Т. 22. – № 5. – С. 494–502.
15. Рейзлин В.И., Филимонов В.А. Уравнение состояния нейтронной материи в модели однобозонного обмена // В сб.: Нейтронная физика. – Ч. 3. – М.: Наука, 1986. – С. 128–132.
16. Бете Г. Теория ядерной материи. – М.: Мир, 1974. – 184 с.
17. Leventhal M., MacCallum C.J., Watts A.C. Possible γ-Ray Line from the Crab Nebula // Nature. – 1977. – V. 266. – P. 696–698.
18. Bôrner G., Cohen J.M. Rotating Neutron Star Models and Pulsars // Astrophysical Journal. – 1973. – V. 185. – P. 959–974.